

Εξέταση Ιουνίου 2021 - Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Υπάρχουν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις.

Ερώτηση 1. Ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα του \mathbb{R}^3 ,

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^3 + 2y^4 - 3z^4 = 1\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) : (x^2 + y^3 - z^3 - 1)^3 = 0\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) : x^2y^3z = 0\}, \quad S_4 = \{(x, y, z) : x^2y^4z^2 = 1\}$$

δεν είναι κανονική επιφάνεια.

- (i) S_1 ,
- (ii) S_2 ,
- (iii) S_3 ,
- (iv) S_4 ,
- (v) Άλλο.

Ερώτηση 2. Η κανονική καμπύλη c είναι τομή της επιφάνειας S με εξίσωση $z + x^2 + y^2 = 0$ με επίπεδο $z = -1$. Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

- (i) Η καμπύλη είναι παραβολή,
- (ii) Η καμπύλη είναι ευθεία,
- (iii) Η c είναι ασυμπτωτική καμπύλη της S ,
- (iv) Η καμπύλη είναι κύκλος,
- (v) Η καμπύλη έχει σταθερή καμπυλότητα,
- (vi) Η c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης,
- (vii) Η c είναι καμπύλη καμπυλότητας της S ,
- (viii) Η καμπύλη έχει σταθερή στρέψη,
- (ix) Η καμπύλη είναι κυλινδρική έλικα,
- (x) Άλλο.

Ερώτηση 3. Σε ένα σημείο p μίας κανονικής επιφάνειας είναι $E = 1, F = 0, G = 2$ και $e = 2$. Για ποιες τιμές των θεμελιωδών ποσών f και g είναι το σημείο p ομφαλικό;

- (i) $(f, g) = (0, 2)$,
- (ii) $(f, g) = (0, 0)$,
- (iii) $(f, g) = (2, 4)$,
- (iv) $(f, g) = (0, 4)$

(v) Δεν υπάρχουν τέτοιες τιμές.

(vi) Άλλο.

Ερώτηση 4. Σε σημείο p κανονικής επιφάνειας S η μέση καμπυλότητα είναι $H(p) = -1/2$. Αν η κάθετη καμπυλότητα στο p για την εφαπτομενική διεύθυνση w που σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με την κύρια διεύθυνση που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη κύρια καμπυλότητα είναι $k_n(w) = -3/2$, ποιά από τα παρακάτω δεν ισχύουν;

(i) Το p είναι ελλειπτικό σημείο,

(ii) Το p είναι υπερβολικό σημείο,

(iii) Το p είναι παραβολικό σημείο,

(iv) Το p είναι ισόπεδο σημείο,

(v) Περιοχή του p στην S περιέχεται σε έναν από τους δύο ημιχώρους με ακμή το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο p .

(vi) Περιοχή του p στην S δεν περιέχεται σε έναν από τους δύο ημιχώρους με ακμή το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο p .

(vii) Άλλο.

Ερώτηση 5. Δίνεται μία κανονική επιφάνεια S με εξίσωση

$$x + y^3 - z^4 = 0.$$

Ποια από τα παρακάτω αληθεύουν;

(i) Η εικόνα του διανύσματος $w = (2, 0, 3)$, μέσω της απεικόνισης Weingarten της S στο σημείο της $p(0, 0, 0)$ είναι $2w$,

(ii) Η εικόνα του διανύσματος $w = (0, 2, 3)$, μέσω της απεικόνισης Weingarten της S στο σημείο της $p(0, 0, 0)$ είναι $3w$,

(iii) Η εικόνα του διανύσματος $w = (0, 2, 3)$, μέσω της απεικόνισης Weingarten της S στο σημείο της $p(0, 0, 0)$ είναι $(0, 0, 0)$,

(iv) Η εικόνα του διανύσματος $w = (2, 0, 3)$, μέσω της απεικόνισης Weingarten της S στο σημείο της $p(0, 0, 0)$ είναι $(0, 0, 0)$,

(iv) Η εικόνα του διανύσματος $w = (0, 2, 3)$, μέσω της απεικόνισης Weingarten της S στο σημείο της $p(0, 0, 0)$ είναι $2w$,

(iv) Άλλο.

Ερώτηση 6. Θεωρούμε το γεωμετρικό τόπο Γ των σημείων της επιφάνειας S με εξίσωση

$$z - x^2 - y^2 = 0$$

στα οποία η καμπυλότητα Gauss της S είναι $K = a$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι μία σταθερά. Ποια από τα ακόλουθα δεν είναι αληθή;

- (i) Γ κυλινδρική έλικα,
- (ii) Γ κύκλος,
- (iii) Γ καμπύλη σταθερής στρέψης,
- (iv) Γ καμπύλη σταθεράς κλίσης,
- (v) Γ είναι η επιφάνεια S ,
- (vi) Γ καμπύλη μη σταθερής στρέψης,
- (vii) Γ σημείο,
- (viii) Γ κενό σύνολο,
- (ix) Γ υπερβολή,
- (x) Άλλο.

Ερώτηση 7. Καμπύλη $c(s)$ του \mathbb{R}^2 με φυσική παράμετρο $s > a$ έχει καμπυλότητα $k(s)$. Η καμπυλότητα $\hat{k}(s)$ της νέας καμπύλης

$$\hat{c}(s) = c(s) - (s-a)\dot{c}(s)$$

είναι:

- (i) $\hat{k}(s) = \frac{1}{s-a}$,
- (ii) $\hat{k}(s) = as$,
- (iii) $\hat{k}(s) = \frac{s}{a}$,
- (iv) $\hat{k}(s) = \frac{1}{a}$,
- (v) $\hat{k}(s) = -as$,
- (v) $\hat{k}(s) = s - a$,
- (v) δεν ορίζεται,
- (v) Άλλο.

Ερώτηση 8. Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$, καμπυλότητα $k(s)$ παντού θετική, πρώτο και δεύτερο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$, αντίστοιχα. Θεωρούμε τη νέα καμπύλη $\hat{c}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$\hat{c}(s) = \int_{s_0}^s \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{n}(u) + \vec{b}(u)) du, \quad s_0 \in I$$

Ποια από τα ακόλουθα ισχύουν;

- (i) Αν το κύριο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης \hat{c} σε κάθε σημείο κείται σε επίπεδο παράλληλο προς τα δύο κάθετα διανύσματα της καμπύλης c τότε η καμπύλη c είναι επίπεδη.
- (ii) Δεν ορίζεται πλαίσιο Frenet για την καμπύλη \hat{c} .

- (iii) Η καμπύλη \hat{c} δεν είναι κανονική.
- (iv) Αν η c είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης, τότε και η καμπύλη \hat{c} είναι σταθεράς κλίσης.
- (v) Αν το δεύτερο κάθετο διάνυσμα της καμπύλης \hat{c} εφάπτεται της c , τότε η c είναι επίπεδη.
- (vi) Αν η \hat{c} είναι καμπύλη σταθεράς κλίσης, τότε και η καμπύλη c είναι σταθεράς κλίσης.
- (vii) Το s είναι φυσική παράμετρος για την \hat{c} .
- (viii) Άλλο.

Ερώτηση 9. Σε σημείο p κανονικής επιφάνειας S ισχύει $K(p) = 1 = H(p)$. Ποιό από τα παρακάτω αληθεύει;

- (i) Υπάρχει μια ακριβώς ασυμπτωτική διεύθυνση,
- (ii) Δεν υπάρχουν κύριες διευθύνσεις,
- (iii) Δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις,
- (iv) Υπάρχουν δύο ακριβώς ασυμπτωτικές διευθύνσεις,
- (v) Υπάρχει μία κύρια διεύθυνση και μία ασυμπτωτική διεύθυνση,
- (vi) Υπάρχουν δύο ακριβώς κύριες διευθύνσεις,
- (vii) Υπάρχουν άπειρες ασυμπτωτικές διευθύνσεις,
- (viii) Υπάρχουν άπειρες κύριες διευθύνσεις,
- (ix) Υπάρχει μια ακριβώς κύρια διεύθυνση,
- (x) Άλλο.

Ερώτηση 10. Σε ένα σημείο p κανονικής επιφάνειας S η καμπυλότητα Gauss είναι $K(p) \leq 0$. Ποια από τα ακόλουθα δύναται να ισχύουν;

- (i) Υπάρχουν άπειρες ασυμπτωτικές διευθύνσεις,
- (ii) Δεν υπάρχουν ασυμπτωτικές διευθύνσεις,
- (iii) Υπάρχει μια ακριβώς ασυμπτωτική διεύθυνση,
- (iv) Υπάρχουν δύο ακριβώς ασυμπτωτικές διευθύνσεις,
- (v) Υπάρχουν τρεις ακριβώς ασυμπτωτικές διευθύνσεις,
- (vi) Άλλο.

Ερώτηση 11. Ποια από τα ακόλουθα δεν είναι αληθή;

- (i) Η απεικόνιση Gauss κάθε ελαχιστικής επιφάνειας είναι $1 - 1$.
- (ii) Σε κάθε ισόπεδο σημείο η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι πολλαπλάσιο της πρώτης θεμελιώδους μορφής.

- (iii) Κάθε επιφάνεια με σταθερή θετική καμπυλότητα Gauss είναι τμήμα σφαίρας.
- (iv) Σε κάθε σημείο ελαχιστικής επιφάνειας υπάρχουν το πολύ δύο ασυμπτωτικές διευθύνσεις.
- (v) Σε ομφαλικό σημείο η δεύτερη θεμελιώδης μορφή είναι πολλαπλάσιο της πρώτης θεμελιώδους μορφής.
- (vi) Η τρίτη θεμελιώδης μορφή κάθε ελαχιστικής επιφάνειας είναι πολλαπλάσιο της πρώτης θεμελιώδους μορφής.
- (vii) Κάθε ελαχιστική επιφάνεια έχει ένα τουλάχιστον ελλειπτικό σημείο.
- (viii) Κάθε επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία είναι ομφαλικά είναι τμήμα σφαίρας.

Ερώτηση 12. Δίνεται η κανονική επιφάνεια S με εξίσωση

$$y + x^3 - z^4 = 0.$$

Ποια από τα παρακάτω είναι αληθή;

- (i) Το διάνυσμα $w = (3, 2, 0)$ εφάπτεται της S στο $p(0, 0, 0)$,
- (ii) Το διάνυσμα $w = (3, 0, 2)$ εφάπτεται της S στο $p(0, 0, 0)$,
- (iii) Το διάνυσμα $w = (0, 3, 2)$ εφάπτεται της S στο $p(0, 0, 0)$,
- (iv) Το διάνυσμα $w = (2, 0, 3)$ εφάπτεται της S στο $p(0, 0, 0)$,
- (v) Άλλο.